

Université Hassan II de Casablanca
Année-Universitaire 2015-2016
Faculté des Sciences Ben M'sik
Département de Mathématiques et Informatique
Casablanca

Examen de rattrapage
du module
Analyse V
Filière : SMA (Semestre 3)
(Durée : 1h30mn)

Exercice 1 (6 pts) Soient E un espace vectoriel normé et $A \subset E$. On dit que A est convexe si :

$$\forall x, y \in A, \forall t \in [0, 1], tx + (1 - t)y \in A.$$

1. Rappeler la définition d'un point x de E adhérent à A .

On note par $\overline{A}$ l'ensemble des points x de E adhérents à A .

2. Montrer que les propositions sont équivalentes :

(a) $x \in \overline{A}$,

(b) Il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de A qui converge vers x .

3. Montrer que si A est convexe alors $\overline{A}$ est convexe.

Exercice 2 (5 pts)

1. Montrer que l'équation

$$e^{x+y} + x - 1 = 0$$

définit implicitement y en fonction de x au voisinage du point $(0, 0)$.

2. En notant par φ la fonction implicite définie au voisinage de 0, qui à x fait correspondre y . Calculer $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$.

3. Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction φ .

Exercice 3 (9 pts) Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} g(x, y) = xy \sin\left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{x+y}{x-y}\right)\right) & \text{si } x \neq y, \\ g(x, y) = 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

1. Montrer que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

2. En déduire que g est différentiable en $(0,0)$ et donner la valeur de la différentielle en ce point.

3. On désigne par $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - y = 0\}$. Montrer que Δ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

4. Soit $(x, y) \notin \Delta$.

(a) Calculer $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$.

(b) En déduire que g est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$.

(c) Pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, donner l'expression de la différentielle $dg_{(x,y)}(h, k)$.

5. Calculer $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Que pouvez-vous conclure ?

Contrôle d'Analyse 4 - S11A/S3 - F.S.B.M
Séance de Janvier 2016

Exercice 1

Soit $f_n(x) = n x^n e^{-x\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$

a) Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} n^n f_n(x)$ pour $x > 0$ fixe et déduire l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que : $n \geq N \Rightarrow f_n(x) \leq \frac{1}{n^2}$

b) Déduire la convergence simple de la série $\sum f_n$ sur $D = [0, +\infty[$

c) Dresser le tableau de variation de f_n sur D et déduire que

c₁) $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur D

c₂) $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur D

c₃) $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ où $a > 0$

Exercice 2

Soit la série entière $\sum \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \cdot x^n$

a) Déterminer le rayon de convergence R

b) Étudier la convergence en R et $-R$

Exercice 3

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π -périodique, pair vérifiant : $f(x) = -x$ pour $x \in [0, \pi]$

a) Tracer le graphe de f

b) Déterminer les coefficients de Fourier associés à f

c) Étudier la convergence de la série de Fourier associée à f

d) Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

Exercice 1

Étudier la nature des séries numériques: $\sum \frac{\ln(n)}{n}$; $\sum \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}$; $\sum \frac{n e^n}{(1+n)!}$; $\sum (\frac{n-5}{n})^{n^2}$; $\sum (e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n})$; $\sum (-1)^n \lg(\frac{1}{\sqrt{n}})$; $\sum \frac{\cos(n)}{\ln(n)}$

Exercice 2

Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions

$$f_n(x) = \frac{1}{1+(x+n)^2}; x \in \mathbb{R} \quad ; \quad f_n(x) = \frac{1-x^n}{1+x^{2n}}; x \in [0, 1]$$

$$\text{et } f_n(x) = n(1-x)^n \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right), x \in [0, 2]$$

Exercice 3

Étudier la convergence simple, uniforme et normale des séries de fonctions

$$\sum x e^{-x^2}, x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \sum \frac{x^n}{1+n x}, x \geq 0$$

Exercice 4

A) Déterminer le rayon de convergence des séries entières

$$\sum \frac{n^2 + n}{2^n + n!} x^n \quad ; \quad \sum e^{-sh(n)} x^n$$

B) i) Déterminer le rayon de convergence R de $\sum (\sin \frac{1}{\sqrt{n}}) x^n$

ii) Étudier la convergence en R et $-R$

iii) Si $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}}) x^n$, étudier la continuité et la dérivabilité de S sur son domaine de définition